Simulation dynamischer Systeme

Prof. Dr. A. G. Fleischer
Universität Hamburg

Ein Modell eines realen zeitabhängigen Prozesses setzt die Definition eines Systems aus miteinander wechselwirkenden Elementen voraus. Wobei die Festlegung der Systemgrenzen und des Charakters der Wechselwirkungen zwischen den Elementen die Dynamik des Systems bestimmen. Im einfachsten Fall ist die zeitliche Änderung einer Zustandsvariablen von der Größe der Zustandsvariablen selbst abhängig, z. B. Zerfall von radioaktivem Material. Es lässt sich eine lineare Differentialgleichung aufstellen, die für Schüler leicht lösbar ist. Bei der analytischen Diskussion von Differentialgleichungen höherer Ordnung, z. B. einer Schwingungsgleichung, treten bereits Probleme auf. An einer Verallgemeinerung von linearen Differentialgleichungen in Form von Übertragungsfunktionen ist nicht zu denken, da es in der Regel keinen intuitiven Zugang für Schüler gibt. Es fehlt die Möglichkeit, an einem Modell Hypothesen anschaulich auszuprobieren. Es ist daher sinnvoll, ein verbreitetes Simulationswerkzeug wie MATLAB mit SIMULINK einzusetzen, das einerseits mächtig ist und andererseits auch im schulischen Bereich einen schnellen Zugang erlaubt. Im *ersten Schritt* sollen zunächst einfache Modelle, z. B. von Zerfallsprozessen, Filtern oder Regelkreisen, in Form von Differentialgleichungen mit Hilfe dieses Werkzeuges ausprobiert und grafisch aufgearbeitet werden. Grundlegend ist dabei zu berücksichtigen, dass die Simulation solch dynamischer Systemen in diskreter Weise schrittweise in Form einer Differenzengleichung erfolgen muss. Aus dem aktuellen Zustand x_i zum Zeitpunkt t_i wird der folgende Zustand x_{i+1} zum Zeitpunkt t_{i+1} mittels der Beziehung $x_{i+1}=f(x_i)$ berechnet, wobei f den funktionalen Zusammenhang darstellt. Ausgehend von einem aktuellen Zustand x_i erfolgt also eine Transition in den nachfolgenden Zustand x_{i+1}. Die Zustandsgröße x_i durchläuft dabei in Form einer Trajektorie den Zustandsraum.

Lineare Differentialgleichungen sind hilfreich, in der Natur gibt es jedoch fast nur nichtlineare Wechselwirkungen. Trotz ihrer grundlegenden Bedeutung in den Naturwissenschaften werden nichtlineare Differentialgleichungssysteme als unzugänglich für den schulischen Bereich betrachtet. Es soll daher in einem *zweiten Schritt* deutlich gemacht werden, dass bei Verwendung eines geeigneten Simulationswerkzeuges diese Auffassung geändert werden kann. Auf simulationstechnischer Ebene stellt die Lösung linearer und nichtlinearer Systeme keinen sehr unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad dar. Mit der Modellierung nichtlinearer Systeme wird erst der Reichtum ihrer strukturerzeugenden und selbstorganisierenden Eigenschaften deutlich. Als einfaches Simulationsbeispiel soll hier das Räuber-Beute-Problem aufgegriffen werden.

Der Übergang zu nichtlinearen Systembetrachtungen ist wichtig und kann zu einer erheblichen kognitiven Vereinfachung für den Schüler führen, da er es gewohnt ist, in Form abgeschlossener Entitäten zu denken. Die binäre Zustandsbetrachtung 0 oder 1 basiert auf einem nichtlinearen

Prozess und eröffnet eine neue Klasse von dynamischen Systemen, die Zellulären Automaten. Greifen wir im *dritten Schritt* wieder das Räuber-Beute-Problem auf, so lässt sich ein Räuber, beispielsweise ein Fuchs, als Entität auffassen, die sich an einem Ort befindet oder auch nicht (1,0). Gleiches gilt für das Beutetier, beispielsweise ein Kaninchen. Räuber- und Beutetiere wandern umher und treffen sich zufällig. Mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit vermehren sich die Beutetiere. Mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit wird das Beutetier vom Räuber gefressen und die Population der Räuber kann wachsen. Bekommen die Räuber nichts zu fressen, dann wird ihre Population abnehmen. Ausgehend von einer bestimmten örtlichen Verteilung von Räubern und Beutetieren erfährt das System im nächsten Zeitschritt eine Transition in einen neuen Zustand. Die für den Schüler leicht nachvollziehbare Wechselwirkung zwischen Räuber und Beutetier lässt sich in zwei Zustandsgrößen zusammenfassen, die die Größe der jeweiligen Population beschreiben. Damit wird das nichtlineare Differentialgleichungssystem des Räuber-Beute-Problems auf die konkrete Wechselwirkung zwischen den einzelnen Tieren zurückgeführt und es kann eine Lösung des nichtlinearen Differentialgleichungssystems gefunden werden. Zelluläre Automaten erlauben für den schulischen Bereich die Entwicklung besonders geeigneter Heuristiken; für die naturwissenschaftliche Modellbildung dynamischer Systeme stellen sie allgemein ein zentrales numerisches Simulationsverfahren dar.